Partiel du 7 novembre

Sujet du groupe D (cours par F. Hélein, TD par J. Deserti, I. Kharroubi, J. Sohier et M. Stienon)
Durée : 3 heures. Les documents sont interdits à l'exception des notes de cours.
Les téléphones portables et calculatrices sont interdits.

Exercice 1.
Questions de cours.

1. 1) Soient E, F deux ensembles. Soit f une application de E dans F. À quelle condition dit-on que f est injective ? Donner un exemple d'application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. 2) Soient f une fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel. À quelle condition dit-on que a est une racine double de f ? Donner un exemple de fonction polynôme admettant 1 comme racine double.

1. 3) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ un système de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. À quelle condition dit-on que ce système est libre ? Donner un exemple de système libre dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \mathrm{i}z - (1 + \mathrm{i}) = 0$.
On attend les solutions sous la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a, b réels.

Exercice 3.
Soit $z = 1 + \mathrm{i}$. Écrire z sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et θ dans $\mathbb{R}$. En déduire le module et l'argument de z^5.

Exercice 4.
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

4. 1) Décrire les sous-ensemble suivants de $\mathbb{R}$:

$$f(\{2\}), \qquad f(]-\infty, -1]), \qquad f([1, +\infty[), \qquad f^{-1}(\{4\}), \qquad f^{-1}([-1,1]).$$

4. 2) Donner un exemple de deux parties A et B de $\mathbb{R}$ pour lesquelles

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Exercice 5.
Soit f la fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 - 1$.

5. 1) Écrire f comme produit de cinq fonctions polynômes de degré 1, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

5. 2) Écrire f comme produit d'une fonction polynôme de degré 1, à coefficients dans $\mathbb{R}$, et de deux fonctions polynômes de degré 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.
Soient $P = X^6 - 3X^4 + 2X^3 + 1$ et $Q = X^4 + X^2 + 2X$. Effectuer la division euclidienne de P par Q.

Exercice 7.
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2,3)$ et $w = (2, -4,m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

7.a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

7.b) On suppose que w n'est pas multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a $P = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \,\}$, où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 8.

8.a) Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1,0,1)$ et $v = (0,2,1)$ sont-ils linéairement indépendants ? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

8.b) Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1,0,1)$, $v = (2,1,0)$ et $w = (0,1,2)$ sont-ils linéairement indépendants ? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 9. [hors barème : un peu de réflexion]
Déterminer 2 plans vectoriels (sous-espaces vectoriels de dimension 2) P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}^4$ tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Est-ce possible dans $\mathbb{R}^3$?